

Penerapan Peta *Hotelling's T* untuk Melihat Keterkendalian Proses

Dadang Arifin

Jurusan Teknik Industri, Universitas Jenderal Achmad Yani
dadangarifin@yahoo.co.id

Abstrak

Penelitian mengenai penerapan metode analisis multivariat dalam menyelesaikan permasalahan kualitas proses pembuatan produk. Hampir semua produk apakah itu produk jadi atau produk setengah jadi memiliki karakteristik kualitas lebih dari satu. Sebagai contoh kualitas sebuah komponen bantalan (*bearing*) bisa ditentukan oleh beberapa dimensi yang terukur misalnya diameter dalam, diameter luar, ketebalan dan lain sebagainya. Permasalahan akan menjadi semakin kompleks jika pengukuran melibatkan dimensi yang tidak terukur (*unmeasurable dimension*). Jika sebuah produk memiliki karakteristik kualitas lebih dari satu dengan kajian dilakukan secara parsial akan menyebabkan kesalahan ganda atau berulang, karena setiap dimensi yang diamati melalui proses sampling akan memberikan nilai kesalahan sebesar α . Permasalahan yang muncul dalam penelitian ini adalah bagaimana metode pengendalian kualitas statistik mampu memantau kualitas proses setiap dimensi dilakukan secara simultan sehingga resiko kesalahan yang akan diterima hanya satu kali. Atas dasar itulah dalam tulisan ini akan dibahas mengenai penerapan salah satu metode analisis multivariat yang dikembangkan oleh Harold Hotelling dalam pengendalian kualitas. Penelitian dilakukan di CV. Laksana Metal Industri, yakni sebuah perusahaan yang membuat salah satu produk elektronik dengan kondisi pada saat ini cacat dominan terdapat pada posisi lubang yaitu sekitar 51%. Cacat posisi lubang ini yang akan dijadikan sebagai bahan kajian dalam penerapan metode tersebut di atas.

Kata kunci: *Hotelling*, varians, kovarians, kapabilitas, variabilitas.

1. Pendahuluan

Saat ini dunia industri dihadapkan pada persaingan yang semakin ketat dalam upaya mempertahankan kepercayaan konsumen. Beberapa konsep pengendalian kualitas bermunculan mulai dari pendekatan yang bersifat teknis (statistik) maupun yang bersifat manajerial. Pengendalian dan peningkatan kualitas menjadi isu strategis bagi perusahaan, baik yang bergerak di bidang manufaktur, distributor, transportasi, perusahaan penyedia jasa keuangan, jasa kesehatan, serta biro-biro pemerintahan (Montgomery, 2009). Menurut Garvin (1987) penilaian kualitas produk terbagi menjadi delapan dimensi yaitu; *performance, reliability, durability, serviceability, aesthetics, features, perceived quality, and conformance to standards*.



Gambar 1. Produk ODF tipe FC 24

Fakta menunjukkan bahwa sampai saat ini masih banyak penelitian tentang kualitas belum menyentuh terhadap delapan dimensi tersebut. Kecuali penelitian berbasis eksperimen, masih banyak penelitian tentang kualitas hanya melibatkan satu atau beberapa variabel saja terutama dalam melihat keterkendalian proses. Karena itu penelitian tentang *statistical process control* tidak lagi menjadi hal yang menarik (pengamatan di jurusan Teknik Industri Unjani), padahal keterkendalian proses merupakan langkah awal dan sebagai bagian penting dalam menghasilkan produk yang baik. Bersamaan dengan studi kasus yang dilakukan di CV. Laksana Metal Industri, peneliti akan mencoba menerapkan metode *multivariate quality control* untuk melihat keterkendalian proses.

CV. Laksana Metal Industri merupakan salah satu perusahaan yang memproduksi beberapa komponen alat instalasi komunikasi. Perusahaan ini

Info Makalah:

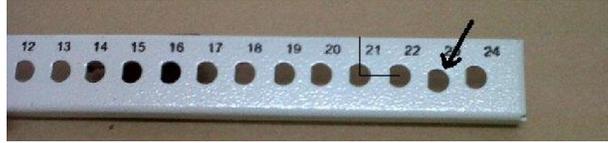
Dikirim : 04-05-2017;
Revisi 1 : 02-01-2018;
Diterima : 02-01-2018.

Penulis Korespondensi:

Telp : +62-8112-2213-61
e-mail : dadangarifin@yahoo.co.id

menjalinkan kerjasama dengan perusahaan telekomunikasi PT. TELKOM melalui *ericson*, *siemens*, dan *NIE*, serta perusahaan telekomunikasi yang lain seperti *Indosat* dan *XL*. Dari beberapa produk yang dibuat perusahaan, produk ODF paling banyak diproduksi yaitu lebih dari 100 unit per bulan sedangkan produk yang lainnya kurang dari 100 unit. per bulan. Produk ODF juga mempunyai frekuensi pesanan yang cukup tinggi yaitu sekitar rata-rata 12 kali dalam rentang satu tahun. Bentuk dari produk dapat dilihat pada Gambar 1.

Ada beberapa jenis cacat yang terjadi pada produk ODF, yaitu cat bergelembung, ulir sobek, posisi lubang, tekukan tidak sempurna, lubang tidak rata, dan cat tidak rata. Cacat posisi lubang merupakan jenis cacat yang secara langsung berpengaruh terhadap fungsi produk ODF (Gambar 2). Jika dibandingkan dengan jenis cacat lainnya jenis cacat posisi lubang memiliki persentase cacat paling tinggi yaitu sebesar 51. Hal inilah yang menjadi alasan pemilihan permasalahan dalam penelitian ini, yaitu meneliti keterkendalian proses pembuatan lubang berdasarkan dua variabel pengukuran yaitu jarak pusat lubang terhadap tepi, jarak pusat lubang ke samping kiri dan kanan.



Gambar 2. Cacat posisi lubang pada komponen face plate

2. Metode

Terdapat beberapa tahap penting yang dilakukan dalam penelitian ini, namun dalam makalah ini hanya disampaikan mengenai tahapan penentuan metode yang digunakan. Seperti yang telah dituliskan dalam pendahuluan bahwa tujuan dari tulisan ini adalah untuk menerapkan metode *multivariate quality control* untuk melihat keterkendalian proses. Salah satu metode yang akan digunakan dalam tulisan ini adalah metode yang dikembangkan oleh Harold Hotelling (peta kontrol Hotelling's *T*) (Morrison, 2005; Amiri dan Doroudyan, 2014). Peta kontrol Hotelling *T* digunakan untuk memonitor vektor rata-rata dari sebuah proses produksi dengan melibatkan multivariabel yang dikaji secara simultan, misalkan sebuah komponen dengan tiga karakteristik kualitas yaitu diameter dalam, diameter luar dan ketebalan (Montgomery, 2009). Adapun konsep statistik yang dikembangkan oleh Hotelling dapat dijabarkan sebagai berikut:

Misalkan hasil pengukuran melibatkan variabel $x_1, x_2, x_3, \dots, x_p$ melalui pengamatan sebanyak m sampel masing-masing berukuran n . Rata-rata dan variansinya dihitung dengan menggunakan persamaan (1) dan (2).

$$\bar{x}_{jk} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_{ijk} \quad \begin{cases} j = 1, 2, \dots, p \\ k = 1, 2, \dots, m \end{cases} \quad (1)$$

$$s_{jk}^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (x_{ijk} - \bar{x}_{jk})^2 \quad \begin{cases} j = 1, 2, \dots, p \\ k = 1, 2, \dots, m \end{cases} \quad (2)$$

Dengan x_{ijk} adalah data observasi ke- i , pada karakteristik kualitas ke- j , pada sampel ke- k . Kovarians antara karakteristik kualitas ke- j dengan karakteristik kualitas ke- h pada sampel ke- k dapat dihitung dengan persamaan (3)

$$S_{jhk} = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (x_{ijk} - \bar{x}_{jk})(x_{ihk} - \bar{x}_{hk}) \quad \begin{cases} k = 1, 2, \dots, m \\ j \neq h \end{cases} \quad (3)$$

Dari statistik $\bar{x}_{jk}, s_{jk}^2, S_{jhk}$ diperoleh rata-rata sebagai berikut:

$$\bar{\bar{x}}_j = \frac{1}{m} \sum_{k=1}^m \bar{x}_{jk} \quad j = 1, 2, \dots, p \quad (4)$$

$$\bar{s}_j^2 = \frac{1}{m} \sum_{k=1}^m s_{jk}^2 \quad j \neq k \quad (5)$$

$$\bar{s}_{jh} = \frac{1}{m} \sum_{k=1}^m S_{jhk} \quad j \neq k \quad (6)$$

Nilai \bar{x}_j merupakan elemen dari vektor $\bar{\bar{x}}$ dan matriks varian-kovarians berdimensi $p \times p$ yang diambil dari sampel adalah:

$$S = \begin{bmatrix} \bar{s}_1^2 & \bar{s}_{12} & \bar{s}_{13} & \cdots & \bar{s}_{1p} \\ & \bar{s}_2^2 & \bar{s}_{23} & \cdots & \bar{s}_{2p} \\ & & \bar{s}_3^2 & \cdots & \vdots \\ & & & \ddots & \vdots \\ & & & & \bar{s}_p^2 \end{bmatrix} \quad (7)$$

Peta kontrol yang dikembangkan oleh Hotelling dikenal sebagai peta kontrol T^2 , yaitu

$$T^2 = n(\bar{x} - \bar{\bar{x}})' S^{-1} (\bar{x} - \bar{\bar{x}}) \quad (8)$$

Ada dua fase dalam penggunaan peta kontrol ini. Fase 1 digunakan untuk melihat keterkendalian proses saat ini, yang diambil dari sampel awal sebanyak m dengan ukuran masing-masing sebesar n . Pada fase 1 ini juga bertujuan untuk memproyeksi kondisi terkendali jika saat ini proses dalam keadaan tidak terkendali, sehingga fase ke 2 dapat dibentuk atau dilanjutkan. Fase 2 dibuat untuk memonitor keterkendalian proses pada periode berikutnya.

Peta kontrol pada fase 1 dibentuk dengan menggunakan batas atas dan bawah sebagai berikut:

$$UCL = \frac{p(m-1)(n-1)}{mn-m-p+1} F_{\alpha, p, mn-m-p+1} \quad (9)$$

$$LCL = 0$$

Peta kontrol pada fase 2 digunakan untuk memonitor proses berikutnya dengan menggunakan batas atas dan bawah berikut ini

$$UCL = \frac{p(m+1)(n-1)}{mn-m-p+1} F_{\alpha, p, mn-m-p+1} \quad (10)$$

$$LCL = 0$$

Selain untuk memonitor rata-rata proses, peta kontrol juga dapat digunakan untuk memonitor variabelitas proses. Peta kontrol Hotelling digunakan untuk memonitor rata-rata proses, sedangkan untuk memonitor variabelitas proses yang ditunjukkan oleh sebuah matriks varian kovarians Σ , Alt (1985) memperkenalkan cara mudah untuk masalah tersebut yaitu dengan menggunakan determinan matriks varians kovarians dari sampel $|S|$. Montgomery dan Wadsworth menurunkan formulasi untuk menentukan batas-batas kontrol sebagai berikut (Montgomery, 2009):

$$UCL = |\Sigma| (b_1 + 3b_2^{1/2})$$

$$CL = b_1 |\Sigma| \quad (11)$$

$$LCL = |\Sigma| (b_1 - 3b_2^{1/2})$$

Dimana,

$$b_1 = \frac{1}{(n-1)^p} \prod_{i=1}^p (n-i)$$

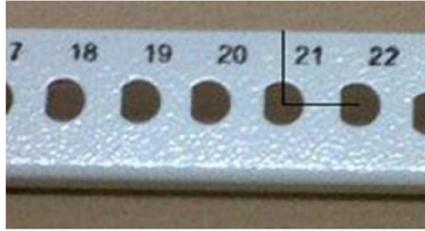
$$b_2 = \frac{1}{(n-1)^{2p}} \prod_{i=1}^p (n-i) \left[\prod_{j=1}^p (n-j+2) - \prod_{j=1}^p (n-j) \right] \quad (12)$$

Σ dapat ditaksir dengan S , dan jika nilai LCL kurang dari nol, maka $LCL=0$.

3. Hasil dan Pembahasan

Pengukuran dilakukan dengan mengambil sampel sebanyak 20 sampel ($m = 20$), masing-masing berukuran $n = 8$. Pengukuran dilakukan terhadap jarak center lubang ke tepi, dan jarak antar center lubang ke kiri atau kanan, sehingga ada dua variabel pengukuran.

Jika: X_1 = jarak horizontal antar center lubang X_2 = jarak vertikal center lubang ke tepi



Gambar 3. Posisi lubang pada ODF

Data yang ditampilkan dalam Tabel 1 merupakan data rata-rata tiap variabel X_1 , X_2 , juga nilai varians dan kovarian dari sampel masing-masing berukuran $n = 8$.

Tabel 1. Statistik hasil perhitungan dimensi produk ODF.

Sampel Number	MEANS		VARIANCES		Covariance	Hotelling's T^2	S _i
	\bar{X}_1	\bar{X}_2	S_{1j}^2	S_{2j}^2	S_{12j}		
1	16.013	28.650	0.338	0.200	-0.021	4.875	0.0670
2	15.938	29.200	0.051	0.151	-0.029	1.682	0.0068
3	16.063	29.013	0.057	0.064	-0.001	0.276	0.0037
4	15.825	28.950	0.185	0.094	0.029	1.066	0.0170
5	15.963	29.200	0.208	0.397	0.254	1.566	0.0180
6	15.913	28.750	0.216	0.303	-0.105	2.259	0.0540
7	16.250	28.900	0.234	0.329	0.130	3.662	0.0600
8	15.788	29.238	0.373	0.048	0.008	4.178	0.0180
9	16.050	28.963	0.040	0.057	0.019	0.262	0.0019
10	15.788	29.063	0.244	0.446	0.131	1.901	0.0920
11	16.063	28.800	0.248	0.197	-0.180	1.830	0.0160
12	15.913	28.888	0.138	0.341	0.120	0.568	0.0330
13	16.050	29.200	0.151	0.183	0.089	1.584	0.0200
14	16.188	29.225	0.230	0.105	0.092	3.285	0.0160
15	15.988	29.213	0.064	0.524	-0.048	1.700	0.0310
16	15.825	28.688	0.174	0.201	0.118	4.082	0.0210
17	16.288	29.238	0.401	0.148	0.158	5.445	0.0340
18	15.963	28.975	0.340	0.454	-0.331	0.029	0.0450
19	15.938	28.838	0.028	0.120	0.006	0.938	0.0033
20	15.838	28.938	0.060	0.074	0.044	0.941	0.0025
Rata-rata	15.982	28.996	0.189	0.222	0.024		

Keterangan:

X_1 = jarak horisontal antar lubang yaitu 16 mm,

X_2 = jarak *vertical center* lubang dengan tepi adalah 29 mm.

n = 8 (ukuran subgroup)

p = 2 (jumlah karakteristik yang dikendalikan)

Perhitungan T^2

$$T^2 = n(\bar{x} - \bar{\bar{x}})' S^{-1} (\bar{x} - \bar{\bar{x}})$$

$$T^2 = 8(16.013 - 15.982, 28.650 - 28.996) \begin{bmatrix} 0.338 & -0.021 \\ -0.021 & 0.200 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 16.013 - 15.982 \\ 28.650 - 28.996 \end{bmatrix}$$

$$= 4.510$$

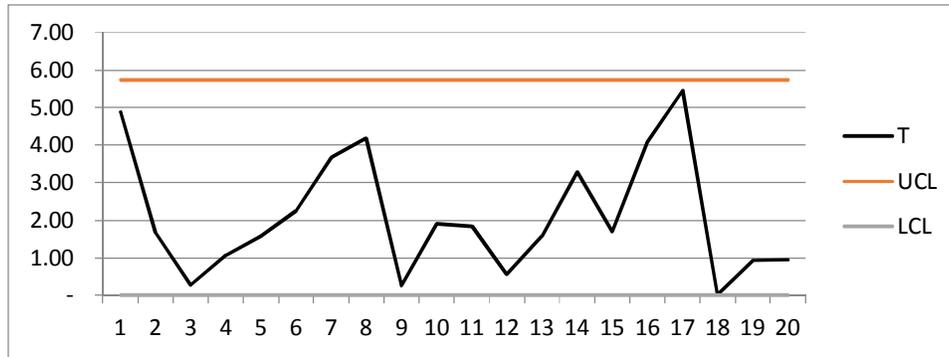
$$UCL = \frac{p(m-1)(n-1)}{mn - m - p + 1} F_{\alpha, p, mn-m-p+1} \quad UCL = \frac{2(20-1)(8-1)}{20 \cdot 8 - 20 - 2 + 1} F_{0.05(2, 20 \cdot 8 - 20 - 2 + 1)}$$

$$LCL = 0$$

$$= \frac{226}{139} (3)$$

$$= 5.74$$

$$LCL = 0$$



Gambar 4. Peta Kontrol T^2 Untuk Memonitor Rata-rata Proses

Dari peta di atas terlihat bahwa tidak ada satu titikpun yang berada di luar batas kontrol, sehingga dapat dikatakan bahwa proses terkendali. Dari kondisi terkendali ini, maka peta fase 2 dapat dibuat untuk memonitor proses berikutnya.

$$\begin{aligned}
 UCL &= \frac{p(m+1)(n-1)}{mn-m-p+1} F_{\alpha, p, mn-m-p+1} \\
 &= \frac{2(20+1)(8-1)}{20(8)-20-2+1} (3) \\
 &= 6,345
 \end{aligned}$$

$$LCL = 0$$

Setelah selesai membuat peta kontrol untuk melihat keterkendalian rata-rata proses selanjutnya peta kontrol untuk memonitor variabilitas proses. Beberapa pakar menyebutkan bahwa keterkendalian variabilitas proses inilah yang menjadi ukuran penting. Jika variabilitas proses tidak terkendali maka keterkendalian rata-rata proses menjadi tidak bermakna (Montgomery)[1]. Karena itu penggunaan kedua peta kontrol ini menjadi suatu keharusan dalam melihat keterkendalian proses.

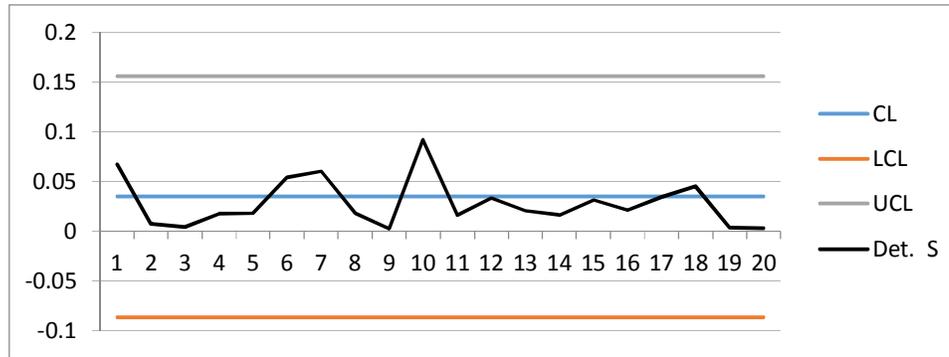
Pembuatan peta untuk memonitor variabel proses dimulai dengan perhitungan, $|S| = 0.0670$, merupakan determinan dari matrik varians-kovarians dari sampel ke- i .

$$\begin{aligned}
 b_1 &= \frac{1}{(n-1)^p} \prod_{i=1}^p (n-i) & b_2 &= \frac{1}{(n-1)^{2p}} \prod_{i=1}^p (n-i) \left[\prod_{j=1}^p (n-j+2) - \prod_{j=i}^p n-j \right] \\
 &= \frac{1}{(8-1)^2} (8-1)(8-2) & &= \frac{1}{(8-1)^4} (42)((9)(8)-42) \\
 &= 0.85 & &= \frac{2352}{2401} \\
 & & &= 0.979
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 UCL &= |\Sigma| (b_1 + 3b_2^{1/2}) \\
 &= 0.041(0.85 + 3\sqrt{0.979}) = 0.156
 \end{aligned}$$

$$CL = b_1 |\Sigma| = 0.85(0.041) = 0.035$$

$$\begin{aligned}
 LCL &= |\Sigma| (b_1 - 3b_2^{1/2}) \\
 &= 0.041(0.85 - 3\sqrt{0.979}) = -0.0869
 \end{aligned}$$



Gambar 5. Peta untuk memonitor variabelitas proses

Dari gambar 5 di atas tampak bahwa tidak ada titik yang berada di luar batas kontrol, maka dapat disimpulkan bahwa proses pembuatan lubang dalam kondisi terkendali.

Kesimpulan

Dari hasil perhitungan yang telah dilakukan di atas memperlihatkan bahwa proses pembuatan lubang berada dalam kondisi terkendali, hal ini terlihat dari seluruh titik yang ada dalam peta tidak melewati batas kontrol. Serta deretan titik di setiap *trend* tidak membentuk sebuah pola tertentu. Kondisi ini menunjukkan bahwa proses saat ini sudah 'stabil' tidak ada faktor luar yang mengganggu jalannya proses yang sedang berlangsung. Tetapi kapabilitas proses yang dimiliki saat ini masih sangat rendah. Dari hasil survey awal bahwa persentase cacat posisi lubang sebesar 51% menunjukkan kemampuan proses yang dicapai saat ini, artinya persentase cacat 51% bukan disebabkan pengaruh faktor luar yang bersifat temporer. Proses saat ini mampu menghasilkan jarak horizontal center lubang adalah 15,982 mm dengan variansi 0,189 mm, sedangkan untuk jarak vertikal center lubang ke tepi menghasilkan rata-rata 28,996 mm dengan variansi 0,222 mm. Karena itu untuk meningkatkan kemampuan proses dalam menghasilkan produk yang lebih baik perlu dilakukan secara menyeluruh yaitu dari aspek operator, metode, perlatan, lingkungan, material bahan baku dan hal lain yang berpotensi mempengaruhi terhadap kualitas. Untuk penelitian lanjutan akan lebih baik jika variabel kualitas atau karakteristik kualitas yang dikaji lebih banyak, serta kajian atau penerapan metode multivariat ini dilanjutkan pada perhitungan kapabilitas proses.

Ucapan Terima Kasih

Penulis mengucapkan terima kasih kepada LPPM Universitas Jenderal Acmad Yani atas dukungan finansial dalam menyelesaikan penelitian ini.

Daftar Pustaka

- Alt, F. B. (1985). Multivariate Quality Control. In *The Encyclopedia of Statistical Sciences*, Wiley, New York.
- Dillon, W. R., & Goldstein, M. (1984). *Multivariate Analysis Methods and Applications*. School of Management, University of Massachusetts. John Willey & Son.
- Garvin, D. (1987). *Competing on The Eight Dimensions of Quality*. Harvard Bussiness Review, 101-109.
- Montgomery, D. C. (2009). *Introduction to Statistical Quality Control*. John Wiley & Sons, New York.
- Amiri, A., Zou, C., and Doroudyan, M. H. (2014). Monitoring Correlated Profile and Multivariate Quality Characteristics. *Quality and Reliability Engineering International*, 30(1), 133-142.
- Morrison, D. F. (2005). *Multivariate Analysis of Variance*. John Wiley & Sons, Ltd, New York.