KARAKTERISASI KONVEKS MELALUI PERTIDAKSAMAAN MATRIKS NON LINIER PADA ANALISIS STABILITAS KENDALI H_∞ UNTUK SISTEM NON LINIER

Oleh :

Asep Najmurrokhman

Jurusan Teknik Elektro-Fakultas Teknik UNJANI

Abstrak

Pada makalah ini akan dipaparkan analisis stabilitas sistem non linier. Keberadaan fungsi Lyapunov yang menjamin stabilitas sebuah kelas sistem non linier dikarakterisasi dengan pertidaksamaan matriks non linier (PMNL) yang menghasilkan masalah kelayakan konveks. Sebuah contoh numerik diperlihatkan untuk memberikan kejelasan tentang metode yang dipaparkan pada makalah ini. Isu seputar tentang solusi pertidaksamaan matrik non linier akan dipaparkan.

In this paper, stability analysis of nonlinear systems is considered. Existence of Lyapunov function as stability guarantee for a class of nonlinear systems is characterized in terms of nonlinear matrix inequalities which result in convex feasibility problems. A numerical example will be shown for clarity this method. The issue of solutions to these nonlinear matrix inequalities is proposed.

Kata Kunci : Kendali H_∞, Pertidaksamaan Matriks Non Linier, Stabilitas Asimtotik, Penguatan-L_2, Karakterisasi Konveks

Pendahuluan

Sebuah kemajuan besar dalam teori kendali linier telah diperlihatkan di makalah [Doyle, J. C., et. al., (1989)] berupa penurunan solusi ruang keadaan pada masalah kendali optimal H_2 dan H_∞. Penurunan yang dilakukan pada makalah tersebut didasarkan melalui cara-cara representasi teori kendali linier kuadratik dan kendali linier kuadratik gaussian seperti melengkapkan kuadrat, persamaan Riccati, dan hubungan antara persamaan Riccati dengan matriks Hamilton [van der Schaft, (1992)].

Penyederhanaan karakterisasi ruang keadaan dari teori kendali H_∞ serta hubungannya dengan metode tradisional dalam kendali optimal seperti yang dipaparkan pada [Doyle, J. C., et. al., (1989)] memicu teoretisi kendali untuk memperumum hasil kendali H_∞ linier dalam ruang keadaan untuk sistem non linier [van der Schaft, (1992); van der Schaft, (1993); Lu, W.M., et. al., (1995); Yuliar, S., (1996)]. Penggunaan istilah "kendali H_∞ non linier" hanya untuk memberikan arah penelitian (riset), karena lebih tepat disebut kendali penguatan-L_2 (L_2-*gain control*), seperti dinyatakan pada [Lu, W.M., et. al., (1995); van der Schaft, (1992)]. Pada dasarnya, asumsi yang dipakai untuk memperumum konsep linier ke non linier adalah bahwa umpan balik keluaran dinamis dari pengendali H_∞ mempunyai struktur pemisahan (*separation structure*) [Ball, J.A., et. al., (1993)]. Dengan asumsi ini, syarat perlu dan cukup pada masalah kendali H_∞ agar dapat dipecahkan secara global atau lokal dikarakterisasi oleh pertidaksamaan atau persamaan Hamilton-Jacobi [Lu, W.M., et. al., (1995)]. Selanjutnya, sebuah pengendali lokal dirancang berdasarkan solusi lokal yang dihasilkan pada pertidaksamaan atau persamaan Hamilton-Jacobi. Sedangkan syarat perlu supaya ada solusi global adalah dengan membangun dua bentuk pertidaksamaan Hamilton-Jacobi [Lu, W.M., et. al., (1995); van der Schaft, (1993)].

Pencarian solusi pada masalah kendali H_∞ non linier biasanya memakai prinsip geometri [van der Schaft, (1992); van der Schaft, (1993)]. Pendekatan yang dilakukan oleh van der Schaft untuk memecahkan persamaan Hamilton-Jacobi adalah dengan mencari hubungan persamaan tersebut dengan *invariant manifold* dari medan vektor Hamilton hiperbolik, sedangkan Isidori, et. al [Isidori, A., et. al., (1992)] memperluas hasil tersebut dengan menyimpulkan bahwa pengendali untuk kendali H_∞ non linier mungkin ditemukan apabila medan vektor Hamiltonnya tidak hiperbolik.

Dengan berkembangnya metode analisis dan sintesis sistem kendali dengan skema pertidaksamaan matriks linier [Apkarian, P., et. al., (1996); El Ghaoui, L., et. al., (2000)], makalah ini akan memaparkan suatu pendekatan altenatif dalam pemecahan masalah kendali H_∞ non linier dan mengkarakterisasi solusinya dengan kondisi konveks yang dinyatakan melalui pertidaksamaan matriks. Cara ini dimotivasi oleh hasil yang diperoleh pada kendali H_∞ bahwa masalah kendali H_∞ linier dapat dikarakterisasi sebagai masalah konveks (*convex characterization*) yang dinyatakan dengan pertidaksamaan matriks linier [Apkarian, P., et. al., (1996)]. Dengan demikian, konveksitas dari masalah kendali H_∞ non linier akan diuji dan kondisi solusinya dikarakterisasi dengan pertidaksamaan matriks yang disebut pertidaksamaan matriks non linier (PMNL) [Lu, W.M., et. al., (1995)].

Notasi yang digunakan dalam makalah ini cukup baku. $\mathbf{R}^n$ menandai ruang real berdimensi-n, $\| G \| = \sqrt{G^T G}$ adalah norm Euclid, $L_2(R^+)$ mendefinisikan ruang dari fungsi bernilai vektor $u : R^+ \to R^m$ sedemikian sehingga $\int_{R^+} \| u(t) \|^2 \, dt < \infty$. Matriks $M = M^T > 0$ berarti matriks simetrik definit positif, $R^{n\times m}$ menandai himpunan matriks real $n \times m$, sedangkan **X** adalah himpunan seluruh variabel keadaan.

ANALISIS PENGUATAN-L_2 PADA SISTEM NON LINIER

Tinjau representasi sistem non linier berikut

$$G_1 : \begin{cases} \dot{x} = f(x) + g(x)w \\ z = h(x) + k(x)w \end{cases} \qquad (1)$$

dengan $x \in R^n$ adalah vektor keadaan, $w \in R^p$ dan $z \in R^q$ adalah vektor masukan dan keluaran. Fungsi f, g, h, dan k adalah fungsi kontinyu yang bernilai vektor atau matriks, serta $f(0) = 0$, $h(0) = 0$. Sistem berevolusi pada subhimpunan terbuka konveks $\mathbf{X} \subset R^n$ yang mengandung titik asal. Dengan demikian, $\mathbf{0} \in R^n$ adalah titik ekuilibrium sistem saat $w = 0$.

Bentuk khusus dari (1) adalah

$$G_2 : \begin{cases} \dot{x} = A(x)x + B(x)w \\ z = C(x)x + D(x)w \end{cases} \qquad (2)$$

dengan $x \in R^n$ adalah vektor keadaan, $w \in R^p$ dan $z \in R^q$ adalah vektor masukan dan keluaran. $A(x)$, $B(x)$, $C(x)$,dan $D(x)$ adalah fungsi yang bernilai matriks dengan dimensi yang bersesuaian.Definisi berikut memberikan identitas penguatan-L_2 pada sistem non linier.

Definisi 1. Penguatan-L_2 pada sistem non linier

Sistem (1) atau (2) dengan keadaan awal $x(0) = 0$ mempunyai penguatan-L_2 (*L_2-gain*) kurang dari atau sama dengan γ untuk $\gamma > 0$ jika

$$\int_0^T \|z(t)\|^2 \, dt \le \gamma^2 \int_0^T \|w(t)\|^2 \, dt \qquad (3)$$

untuk semua $T \ge 0$ dan $w(t) \in L_2[0,T]$ sepanjang keadaan $x(t) \in \mathbf{X}$ untuk $t \in [0,T]$. Berdasarkan [W. M. Lu, et. al, 1995], sistem mempunyai penguatan-L_2 $\le \gamma$, jika dan hanya jika ada sebuah fungsi $V : \mathbf{X} \to R^+$ dengan $V(0) = 0$ (V disebut fungsi penyimpan (*storage function*)) sedemikian sehingga

$$V(x(T)) - V(x(0)) - \int_0^T \left(\gamma^2 \|w(t)\|^2 - \|z(t)\|^2\right) dt \le 0$$

dengan $w(t) \in L_2[0,T]$ dan $x(t) \in \mathbf{X}$ untuk $t \in [0,T]$.

Proposisi berikut memberikan karakterisasi penguatan-L_2 dalam bentuk pertidaksamaan mariks non linier (PMNL) untuk sistem non linier yang bersifat stabil asimtotik.

Proposisi 1. Karakterisasi konveks

Tinjau sistem G_1 dengan $R(x) = \gamma[I - \gamma^{-2}k^T(x)k(x)] > 0$. Sistem G_1 bersifat stabil asimtotik dan mempunyai penguatan-$L_2 \le \gamma$, jika terdapat fungsi definit positif $V : \mathbf{X} \to R^+$ sedemikian sehingga

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial V}{\partial x}(x)f(x) + \gamma^{-1}h^T(x)h(x) & \frac{1}{2}\frac{\partial V}{\partial x}(x)g(x) + \gamma^{-1}h^T(x)k(x) \\ \frac{1}{2}g^T(x)\frac{\partial^T V}{\partial x}(x) + \gamma^{-1}k^T(x)h(x) & \gamma^{-1}k^T(x)k(x) - \gamma I \end{bmatrix} < 0 \tag{4}$$

untuk seluruh $x(t) \in \mathbf{X}$.

Bukti :

Dengan argumen komplemen Schur (lihat lampiran), bentuk (4) dapat dituliskan menjadi

$$\frac{\partial V}{\partial x}(x)f(x) + \gamma^{-1}h^T(x)h(x) - \left[\frac{1}{2}\frac{\partial V}{\partial x}(x)g(x) + \gamma^{-1}h^T(x)k(x)\right]\left[-\gamma I + \gamma^{-1}k^T(x)k(x)\right]^{-1} \times$$
$$\left[\frac{1}{2}g^T(x)\left(\frac{\partial V}{\partial x}(x)\right)^T + \gamma^{-1}k^T(x)h(x)\right] < 0 \tag{5}$$

Pertidaksamaan (5) adalah bentuk pertidaksamaan Hamilton-Jacobi [Lu, W.M., et.al., (1995)]. Dengan notasi R, pertidaksamaan (5) dapat dituliskan menjadi (untuk menyederhanakan notasi, variabel x tidak dituliskan)

$$\frac{\partial V}{\partial x}f < -\gamma^{-1}h^T h - \left[\frac{1}{2}\frac{\partial V}{\partial x}g + \gamma^{-1}h^T k\right]R^{-1}\left[\frac{1}{2}g^T\left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)^T + \gamma^{-1}k^T h\right] \tag{6}$$

Turunan fungsi V terhadap waktu berbentuk

$$\dot{V} = \frac{\partial V}{\partial t} = \frac{\partial V}{\partial x}\dot{x} = \frac{\partial V}{\partial x}\{f + gw\} = \frac{\partial V}{\partial x}f + \frac{\partial V}{\partial x}gw \tag{7}$$

Dari pertidaksamaan (6), maka

$$\dot{V} < \frac{\partial V}{\partial x}gw - \gamma^{-1}h^T h - \left[\frac{1}{2}\frac{\partial V}{\partial x}g + \gamma^{-1}h^T k\right]R^{-1}\left[\frac{1}{2}g^T\left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)^T + \gamma^{-1}k^T h\right] \tag{8}$$

Bentuk lain (8) adalah

$$\dot{V} < -\gamma^{-1}h^T h + \frac{1}{2}\frac{\partial V}{\partial x}gw + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial V}{\partial x}gw\right)^T - \left[\frac{1}{2}\frac{\partial V}{\partial x}g + \gamma^{-1}h^T k\right]R^{-1} \times$$
$$\left[\frac{1}{2}g^T\left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)^T + \gamma^{-1}k^T h\right] \tag{9}$$

Dengan menambahkan dan mengurangkan oleh $\gamma w^T w$ serta dari notasi $R = \gamma I - \gamma^{-1} k^T k$, pertidaksamaan (9) dapat dituliskan menjadi

$$\dot{V} < \gamma w^T w - \gamma w^T\left(\gamma^{-2} k^T k + \gamma^{-1} R\right) w - \gamma^{-1} h^T h + \frac{1}{2}\frac{\partial V}{\partial x} g w + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial V}{\partial x} g w\right)^T -$$

$$\left[\frac{1}{2}\frac{\partial V}{\partial x} g + \gamma^{-1} h^T k\right] R^{-1} \left[\frac{1}{2} g^T \left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)^T + \gamma^{-1} k^T h\right] \quad (10)$$

Dengan melengkapkan kuadrat pertidaksamaan (10) melalui penambahan dan pengurangan oleh $\gamma^{-1} w^T k^T h$ dan $\gamma^{-1} h^T k w$, didapatkan

$$\dot{V} < \gamma w^T w - \gamma^{-1}(h + kw)^T (h + kw) - w^T R w + \gamma^{-1} w^T k^T h + \gamma^{-1} h^T k w +$$

$$\frac{1}{2}\frac{\partial V}{\partial x} g w + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial V}{\partial x} g w\right)^T - \left[\frac{1}{2}\frac{\partial V}{\partial x} g + \gamma^{-1} h^T k\right] R^{-1} \left[\frac{1}{2} g^T \left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)^T + \gamma^{-1} k^T h\right] \quad (11)$$

Karena $z(t) = h(x) + k(x)w(t)$, pertidaksamaan (11) dapat dituliskan menjadi

$$\dot{V} < \gamma\|w\|^2 - \gamma^{-1}\|z\|^2 - \left\| R^{1/2} w - \gamma^{-1} R^{-1/2} k^T h - \tfrac{1}{2} R^{-1/2} g^T \frac{\partial V}{\partial x}^T \right\|^2 \quad (12)$$

dengan $R = (R^{1/2})^T R^{1/2}$ dan $R^{-1} = (R^{-1/2})^T R^{-1/2}$, sehingga

$$\dot{V} < \gamma\|w\|^2 - \gamma^{-1}\|z\|^2 \quad (13)$$

Bentuk (13) memperlihatkan bahwa sistem mempunyai penguatan-$L_2 \leq \gamma$. Untuk $w(t) = 0$, $\dot{V} < 0$, sehingga $V : \mathbf{X} \to R^+$ merupakan fungsi Lyapunov. Dengan demikian, sistem G_1 bersifat stabil asimtotik.

Apabila ditinjau sistem non linier khusus G_2, dan ambil bentuk $\frac{\partial V}{\partial x}(x) = 2x^T P(x)$ dengan $P(x) = P^T(x)$ $: \mathbf{X} \to R^{nxn}$ maka pertidaksamaan matriks (4) menjadi

$$\begin{bmatrix} x^T\left[A^T(x)P(x) + P(x)A(x) + \gamma^{-1}C^T(x)C(x)\right]x & x^T\left[P(x)B(x) + \gamma^{-1}C^T(x)D(x)\right] \\ \left[B^T(x)P(x) + \gamma^{-1}D^T(x)C(x)\right]x & \gamma^{-1}D^T(x)D(x) - \gamma I \end{bmatrix} < 0$$

Kondisi cukup agar PMNL di atas terpenuhi adalah

$$\begin{bmatrix} A^T(x)P(x) + P(x)A(x) + \gamma^{-1}C^T(x)C(x) & P(x)B(x) + \gamma^{-1}C^T(x)D(x) \\ B^T(x)P(x) + \gamma^{-1}D^T(x)C(x) & \gamma^{-1}D^T(x)D(x) - \gamma I \end{bmatrix} < 0 \quad (15)$$

untuk semua $x \in \mathbf{X}$.

Hasil di atas diperlihatkan pada teorema berikut.

Teorema 1.

Tinjau sistem G_2 yang diberikan pada (2). Untuk fungsi yang bernilai matriks $P(x) = P^T(x) : \mathbf{X} \to R^{nxn}$, dua pernyataan berikut ekivalen :

(i) $P(x)$ memenuhi (15)

(ii) $P(x)$ memenuhi

$$\begin{bmatrix} A^T(x)P(x)+P(x)A(x) & P(x)B(x) & C^T(x) \\ B^T(x)P(x) & -\gamma I & D^T(x) \\ C(x) & D(x) & -\gamma I \end{bmatrix} < 0 \qquad (16)$$

untuk semua $x \in \mathbf{X}$.

Jika ada fungsi $V : \mathbf{X} \rightarrow \mathrm{R}^+$ sedemikian sehingga $\frac{\partial V}{\partial x}(x) = 2x^T P(x)$ maka sistem mempunyai penguatan-$L_2 \leq \gamma$ dan bersifat stabil asimtotik.

Bukti :

Pertidaksamaan matriks (16) didapat dengan komplemen Schur pada PMNL (15). Pernyataan berikutnya dibuktikan pada proposisi 1.

Karakterisasi PMNL untuk sistem yang mempunyai penguatan-$L_2 \leq 1$ seperti diperlihatkan pada [Lu, W.M., et. al., (1995)] merupakan bentuk khusus dari karakterisasi di atas. Dengan mengamati teorema 1 maka dapat dinyatakan bahwa keberadaan fungsi $P(x)$ yang memenuhi PMNL di atas tidak cukup menjamin sistem mempunyai penguatan-$L_2 \leq \gamma$. Pada teorema tersebut, persyaratan tambahannya adalah terdapatnya fungsi definit positif $V : \mathbf{X} \rightarrow \mathrm{R}^+$ sedemikian sehingga $\frac{\partial V}{\partial x}(x) = 2x^T P(x)$. Dengan demikian, penguatan-$L_2 \leq \gamma$ untuk sebagian nilai variabel tidak menyebabkan sistem aslinya (untuk semua $x \in \mathbf{X}$) mempunyai penguatan-$L_2 \leq \gamma$.

Definisi berikut memperluas hasil yang dinyatakan oleh [Lu, W.M., et. al., (1995)] untuk memberi identitas sistem yang memiliki penguatan-$L_2 \leq \gamma$.

Definisi 2. Kinerja H_∞ kuat

Sistem G_2 mempunyai **kinerja H_∞ kuat** (*strong* H_∞*-performance*) jika ada fungsi definit positif $P(x) = P^T(x)$ yang memenuhi pertidaksamaan (15) atau (16) untuk seluruh $x(t) \in \mathbf{X}$ sedemikian sehingga $\frac{\partial V}{\partial x}(x) = 2x^T P(x)$ untuk suatu fungsi definit positif $V : \mathrm{X} \rightarrow \mathrm{R}^+$.

Dengan demikian, jika sistem mempunyai **kinerja H_∞ kuat,** sesuai dengan teorema 1, maka sistem mempunyai penguatan-$L_2 \leq \gamma$.

Contoh :

Tinjau sistem berikut :

$$\dot{x} = -\alpha(x)x + \begin{bmatrix} -\alpha(x) & \alpha(x) \end{bmatrix} w$$

$$y = \beta x + \begin{bmatrix} \beta & 0 \end{bmatrix} w$$

dengan $w = \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \end{bmatrix}$, $\alpha(x)$ merupakan fungsi kontinyu positif ($\alpha(x) > 0$, $\forall x \in \mathrm{R}$), dan $\beta \in \mathrm{R}$. Dengan memakai bentuk PMNL (16), maka karakterisasi PMNL sistem adalah

$$\begin{bmatrix} \beta^2 - 2\alpha(x)P(x) & \beta^2 - \alpha(x)P(x) & \alpha(x)P(x) \\ \beta^2 - \alpha(x)P(x) & \beta^2 - 1 & 0 \\ \alpha(x)P(x) & 0 & -1 \end{bmatrix} < 0 \qquad (17)$$

Dengan menggunakan argumen komplemen Schur, bentuk PMNL (17) dapat dituliskan menjadi

$$\begin{bmatrix} \beta^2 - 2\alpha(x)P(x) + \alpha^2(x)P^2(x) & \beta^2 - \alpha(x)P(x) \\ \beta^2 - \alpha(x)P(x) & \beta^2 - 1 \end{bmatrix} < 0 \qquad (18)$$

Dengan menerapkan komplemen Schur, PMNL (18) berlaku apabila

(i) $\beta^2 - 1 < 0 \Rightarrow |\beta| < 1$

(ii) $\{\beta^2 - 2\alpha(x)P(x) + \alpha^2(x)P^2(x)\}-(\beta^2 - 1)^{-1}\{\beta^2 - \alpha(x)P(x)\}^2 < 0$

Dengan kondisi (i) maka pertidaksamaan (ii) di atas dapat ditulis menjadi (variabel x tidak dituliskan)

(iii) $[(\alpha P)^2 - 1]\,[\beta^2 - 2] < 0$

Dengan syarat (i) maka pertidaksamaan (iii) berlaku apabila

$$(\alpha P)^2 - 1 < 0$$

atau

$$|\alpha P| < 1.$$

Karena $\alpha(x)$ merupakan fungsi kontinyu positif ($\alpha(x) > 0$, $\forall x \in$ R), maka pertidaksamaan (iii) dijamin berlaku apabila $P(x) < \alpha^{-1}(x)$. Dengan demikian sesuai dengan definisi 2, sistem memiliki **kinerja H_∞ kuat** untuk $P(x) < \alpha^{-1}(x)$.

Solusi Pertidaksamaan Matriks Non Linier

Pada bagian ini akan dipaparkan metode komputasional dalam analisis kinerja H_∞. Sebagaimana dijelaskan pada bagian II, analisis kinerja H_∞ untuk sistem non linier *affine* (2) melibatkan pertidaksamaan matriks non linier (16). Sistem (2) bersifat stabil asimtotik apabila solusi PMNL (16) dihasilkan $P(x)$ yang bersifat definit positif untuk seluruh keadaan x pada himpunan **X** yang didefinisikan.Hal ini menjadi masalah dimensi tak hingga (*infinite dimensional problem*).

Berdasarkan [Lu, W.M., et. al., (1995)], jika himpunan **X** terbatas, maka hanya diperlukan beberapa persamaan matriks linier yang terhingga untuk mendapatkan solusi PMNL tersebut. Jika himpunan **X** cukup kecil, maka akan didapatkan sebuah solusi konstan untuk PMNL tersebut dengan menggunakan ide pada [Boyd, S., et. al., (1994)].

Untuk lebih konkrit, perhatikan PMNL berikut

$$\begin{bmatrix} A^T(x)P(x) + P(x)A(x) & P(x)B(x) & C^T(x) \\ B^T(x)P(x) & -I & D^T(x) \\ C(x) & D(x) & -I \end{bmatrix} < 0 \qquad (19)$$

dengan asumsi fungsi-fungsi bernilai matriks $A(x)$, $B(x)$, $C(x)$,dan $D(x)$ bersifat kontinyu pada himpunan **X**. Matriks-matriks tersebut diasumsikan membentuk himpunan konveks

$$\Omega(x) \in \mathrm{Co}\left\{[A_i, B_i, C_i, D_i]_{i\in\{1,2,\cdots,L\}}\right\} \quad \forall x \in \mathrm{X} \qquad (20)$$

untuk sembarang A_i, B_i, C_i, D_i dengan $I - D_i^T D_i < 0$ untuk $i \in \{1,2, \ldots, L\}$ dan L bilangan bulat positif. Co adalah singkatan dari *convex hull*.

Jika terdapat sebuah matriks definit positif konstan $P \in \mathrm{R}^{n\times n}$ sedemikian sehingga

$$\begin{bmatrix} A_i^T P + PA_i & PB_i & C_i^T \\ B_i^T P & -I & D_i^T \\ C_i & D_i & -I \end{bmatrix} < 0 \qquad \forall i \in \{1,2,\cdots,L\}$$

yang merupakan himpunan pertidaksamaan matriks linier yang dapat dipecahkan dengan metode optimisasi konveks [Boyd, S., et. al., (1994)] maka solusi P juga memenuhi

$$\begin{bmatrix} A^T(x)P(x)+P(x)A(x) & P(x)B(x) & C^T(x) \\ B^T(x)P(x) & -I & D^T(x) \\ C(x) & D(x) & -I \end{bmatrix} < 0$$

untuk seluruh $x \in \mathbf{X}$.

Dengan demikian, fungsi Lyapunov yang bersesuaian dengan stabilitas sistem (2) berbentuk $V(x) = x^T Px$.

Metode pencarian solusi PMNL di atas memberikan pendekatan yang baik untuk mendapat solusi lokal. Tetapi, pendekatan ini memberikan hasil yang bersifat konservatif jika himpunan keadaan **X** cukup luas.

KESIMPULAN

Pada makalah ini telah dipaparkan analisis stabilitas untuk sebuah kelas sistem non linier yang dikarakterisasi dengan pertidaksamaan matriks non linier (PMNL). Solusi PMNL yang menjamin solusi untuk masalah kendali H_∞ juga telah diuraikan. Sayangnya tidak seperti sistem linier, solusi PMNL tersebut tidak cukup untuk menjamin keberadaan fungsi Lyapunov yang menjamin stabilitas sistem secara global.

DAFTAR PUSTAKA

1. Apkarian, P., et. al., 1996. "LMI Techniques in Control Engineering from Theory to Practice : Workshop Note CDC 1996", Kobe, Japan.
2. Boyd, S., et. al., 1994. "Linear Matrix Inequality in System and Control Theory", SIAM Series, April, Philadelphia, USA.
3. Doyle, J. C., et. al., 1989. "State Space Solutions to Standard H_2 and H_∞ Control Problems", IEEE Trans. AC, vol. AC-34, pp. 831 – 846.
4. El Ghaoui, L., et. al., 2000. "Advances in Linear Matrix Inequality Methods in Control", SIAM Series, Philadelphia, USA.
5. Isidori, A., et. al., 1992. "Disturbance Attenuation and H_∞ Control via Measurement Feedback in Nonlinear Systems", IEEE Trans. AC, vol. AC-38, pp. 546 – 559.
6. Lu, W.M. and Doyle, J.C., 1995. "H_∞ Control of Nonlinear Systems : A Convex Characterization" , IEEE Trans. AC, vol. AC-40, pp. 1668 – 1675.
7. van der Schaft, A.J. , 1992. "L_2-Gain Analysis of Nonlinear Systems and Nonlinear State Feedback H_∞ Control" , IEEE Trans. AC, vol. AC-37, pp. 770 – 784.
8. Yuliar, S., 1996. "Dissipative Systems Theory : Analysis and Synthesis", PhD Dissertation, Australian Na tional University, Australia
9. ____________ , 1993. "Nonlinear State Space H_∞-control Theory", Perspectives in Control. (eds. H.L. Trentelman and J.C. Willems), Birkhauser, Netherland.

Lampiran [Lemma Komplemen Schur]Misalkan sebuah matriks $M = M^T \in \mathrm{R}^{(n+m)\times(n+m)}$ dipartisi menjadi

$$M = \begin{bmatrix} A & B \\ B^T & C \end{bmatrix}$$

dengan $C \in \mathrm{R}^{m\times m}$ sebuah matriks non singular, maka $M > 0$ jika dan hanya jika

- $C > 0$
- $A - BC^{-1}B^T > 0$