ANALISIS SISTEM KENDALI KOKOH PADA SISTEM NON LINIER DENGAN PENDEKATAN PERTIDAKSAMAAN MATRIKS NON LINIER

Asep Najmurrokhman
Jurusan Teknik Elektro Universitas Jenderal Achmad Yani
e-mail : asepnajmu@lycos.com

Abstrak

Makalah ini memaparkan tentang analisis sistem kendali kokoh untuk satu kelas sistem non linier affine melalui skema pertidaksamaan matriks non linier. Kekokohan berhubungan dengan kemampuan sistem yang dikendalikan untuk meredam gangguan sampai tingkat yang diinginkan. Pengendali yang berperan dalam hal tersebut ditemukan dengan cara memecahkan terlebih dahulu suatu kondisi pemecahan yang menginformasikan apakah sistem yang akan dikendalikan memiliki solusi pengendali tersebut atau tidak. Kondisi tersebut diberikan oleh tiga buah pertidaksamaan matriks non linier. Pertimbangan komputasional untuk memecahkan pertidaksamaan matriks tersebut juga diuraikan.

Abstract

This paper proposes about robust control systems analysis for a class of nonlinear systems using nonlinear matrix inequalities approach. Robustness corresponds with appropriately disturbance suppression. Controller that renders robustness property of the system is developed with solving solvability condition in advance. Such condition is described by three nonlinear matrix inequalities. Computational aspect is considered to solve these matrix inequalities.

Kata-kata penting : *Kendali Kokoh, Kendali H_∞ non linier, Pertidaksamaan Matriks Non Linier, Karakterisasi Konveks, Kondisi pemecahan*

Pendahuluan

Kendali kokoh (*robust control*) telah menjadi cabang teori kendali yang cukup aktif sejak akhir tahun 1970-an dan telah menjadi perhatian akademisi, industriawan, dan pemerintahan. Menurut Dailey (1995), teori kendali modern menyandarkan pada model matematis dari *plant* (sistem) yang dikendalikan. Dalam dunia nyata, selalu ada ketidakpastian (*uncertainty*) dalam pemodelan tersebut yang menyebabkan terjadinya perbedaan antara respon aktual *plant* dengan respon dari modelnya. Lebih dari itu, plant dapat berubah akibat usia komponen subsistemnya atau karena perubahan kondisi operasinya. Tujuan dari kendali kokoh adalah membangun aturan kendali umpan balik (*feedback control laws*) yang kokoh terhadap ketidakpastian model dan perubahan dinamika *plant*.

Ketidakpastian dalam pemodelan dapat dinyatakan dengan beberapa cara, yaitu dengan bentuk batas variasi dalam respon frekuensi atau juga dapat berbentuk variasi parameter dari *plant* (misalnya perubahan lokasi *pole* dan *zero* atau perubahan parameter fisis). Ada dua sisi dalam teori kendali kokoh, yaitu analisis kekokohan (*robustness*) dari aturan kendali setelah dirancang serta sintesis aturan kendali kokohnya. Dailey (1995) melaporkan analisis kekokohan melibatkan analisis nilai singular, analisis μ, pemodelan dengan transformasi fraksi linier (*linear fractional transformation*-LFT), dan analisis kestabilan kokoh dengan teorema Kharitonov, sedangkan sintesisnya meliputi sintesis H_∞, Q-*design* dengan parameterisasi Youla, metode kuadratik linier, metode *mix-norm*, dan optimisasi numerik dari aturan kendalinya. Pada makalah ini akan digunakan metode H_∞ sebagai sintesisnya.

Pada tahun-tahun terakhir, konsep kendali H_∞ (konsep penguatan L_2 berhingga - *finite* L_2-*gain*) sebagai ukuran kinerja sistem telah dikembangkan dalam perancangan sistem kendali untuk sistem linier maupun sistem non linier. Pada sistem linier, ukuran kinerja penguatan berhingga merupakan cara yang efektif untuk menangani permasalahan pengendalian praktis [Green, et. al., 1995]. Penggunaan istilah *norm* H_∞ untuk perancangan kendali kokoh (*robust control*) diantaranya digunakan oleh Maciejowski (1989). Permasalahan perancangan dalam praktek dapat diklasifikasikan menjadi :

a. stabilisasi kokoh (*robust stabilization*) terhadap ketidakpastian yang tidak terstruktur
b. pembentukan kinerja (*performance shaping*) untuk sistem nominal

Dengan memanfaatkan teknik penguatan kecil (*small gain*), stabilitas dari sistem yang terdiri atas model nominal dan deskripsi ketidakpastiannya dapat diuji [Green, et. al., 1995]. Ketidakpastian yang ada dalam sistem bisa berbentuk gangguan aditif atau multiplikatif serta bisa juga muncul sebagai gangguan di bagian masukan ataupun keluaran. Teorema penguatan kecil menjamin stabilitas dari sistem jika perkalian antara *norm* H_∞ dari model gangguan dan *norm* H_∞ dari model nominal kurang daripada satu [Green, et. al., 1995]. Dalam pembentukan kinerja, ada dua pendekatan untuk menghasilkan kinerja yang diharapkan. Pendekatan pertama, yang biasa disebut perancangan pembentukan lingkar (*loop shaping design*), perancang membentuk sejumlah kuantitas lingkar tertutup yang mencerminkan perilaku utama lingkar tertutup dalam skema iteratif [Green, et. al., 1995]. Nilai singular dari fungsi sensitivitas dan fungsi komplementer sensitivitas adalah kuantitas yang biasa digunakan dalam pendekatan ini. Pendekatan kedua biasanya dilakukan dengan merumuskan kriteria kinerja yang dihasilkan sebagai kriteria peredaman gangguan (*disturbance attenuation criterion*) [Yuliar, 1996].

Pada sistem non linier, stabilitas kokoh dapat dicari secara prinsip dengan menerapkan teorema penguatan kecil [Hill, et. al., 1976]. Dalam praktek, informasi yang berkaitan ukuran dan lokasi ketidakpastian tidak cukup mudah diperoleh. Terlebih lagi pada sistem non linier, hasil-hasil penguatan kecil hanya memberikan syarat cukup. Dengan demikian pengendali yang dihasilkan bersifat konservatif [Yuliar, 1996], sehingga membatasi penggunaan metode perancangan dengan penguatan berhingga non linier untuk stabilisasi kokoh. Pada kasus pembentukan kinerja, pendekatan pertama tidak mudah untuk diperluas pada sistem non linier karena kesulitan memahami tentang kuantitas yang mengkarakterisasi perilaku dominan dari sistem lingkar tertutupnya. Pendekatan kedua dapat digunakan secara langsung pada sistem non linier. Beberapa literatur yang digunakan oleh Yuliar (1996) menggunakan kriteria kinerja penguatan berhingga (*finite gain performance criteria*) untuk memecahkan beberapa tipe dari masalah peredaman gangguan.

Makalah ini memaparkan analisis sistem kendali kokoh pada satu kelas sistem non linier yang bersifat *affine* dengan skema pertidaksamaan matriks non linier. Makalah ini memberikan kontribusi pada dua hal, yaitu :

a. perumusan kondisi pemecahan (*solvability condition*) dalam masalah sistem kendali kokoh non linier dengan metode H_∞
b. aspek komputasional dalam menyelesaikan kondisi pemecahan tersebut

Bagian lain makalah membahas hal-hal berikut. Mula-mula dibahas tentang konsep kendali H_∞ dalam sistem kendali secara umum di bagian 2 kemudian dilanjutkan dengan formulasi kendali tersebut untuk sistem non linier di bagian 3. Bagian 3 ini juga memuat hasil utama makalah berupa teorema tentang karakterisasi konveks supaya masalah kendali H_∞ non linier memiliki solusi (yang disebut dengan kondisi pemecahan). Pertimbangan aspek komputasional dalam memecahkan karakterisasi konveks diuraikan dalam bagian selanjutnya. Makalah diakhiri dengan catatan penutup yang berisi kesimpulan dan tindak lanjut penelitian.

KONSEP KENDALI H_∞ DALAM SISTEM KENDALI

Pendahuluan

Pada awal perkembangannya, masalah kendali H_∞ diformulasikan sebagai masalah perancangan sistem linier dalam domain frekuensi. Dari konsep ruang dalam geometri, H_∞ (ruang Hardy) adalah sekumpulan fungsi kompleks yang bersifat terbatas dan analitik di sebelah kanan sumbu imajiner pada bidang kompleks. Masalah kendali H_∞ dapat dirumuskan sebagai peredaman optimal dari norm L_2 untuk masukan eksogen (masukan yang spektrum dayanya tidak diketahui) terhadap keluaran yang dikendalikan dengan batasan stabilitas internal [van der Schaft, 1992].

Penyederhanaan karakterisasi ruang keadaan dari teori kendali H_∞ serta hubungannya dengan metode tradisional dalam kendali optimal seperti yang dipaparkan oleh Doyle, et. al., (1989) memicu teoretisi kendali untuk memperumum hasil kendali H_∞ linier dalam ruang keadaan untuk sistem non linier [van der Schaft, 1992; Lu, et. al., 1995; Yuliar, 1996]. Penggunaan istilah "kendali H_∞ non linier" hanya untuk memberikan arah penelitian (riset), karena lebih tepat disebut kendali penguatan-L_2 (L_2-*gain control*), seperti dinyatakan oleh van der Schaft (1992-3). Pada dasarnya, asumsi yang dipakai untuk memperumum konsep linier ke non linier adalah bahwa umpan balik keluaran dinamis dari pengendali H_∞ mempunyai struktur pemisahan (*separation structure*) [Ball, et. al., 1993]. Dengan asumsi ini, syarat perlu dan cukup pada masalah kendali H_∞ agar dapat dipecahkan secara global atau lokal dikarakterisasi oleh pertidaksamaan atau persamaan Hamilton-Jacobi [Lu, et. al., 1995]. Selanjutnya, sebuah pengendali lokal dirancang berdasarkan solusi lokal yang dihasilkan pada pertidaksamaan atau persamaan Hamilton-Jacobi. Sedangkan syarat perlu supaya ada solusi global adalah dengan membangun dua bentuk pertidaksamaan Hamilton-Jacobi [van der Schaft, 1993;Lu, et. al., 1995].

Pencarian solusi pada masalah kendali H_∞ non linier biasanya memakai prinsip geometri [van der Schaft, 1992-3; Desoer, et. al., 1975; Isidori, et. al., 1992; Ball, et. al., 1993]. Pendekatan yang dilakukan oleh van der Schaft (1992,1993) untuk memecahkan persamaan Hamilton-Jacobi adalah dengan mencari hubungan persamaan tersebut dengan *invariant manifold* dari medan vektor Hamilton hiperbolik, sedangkan Isidori, et. al. (1992) memperluas hasilnya dengan menyimpulkan bahwa pengendali untuk kendali H_∞ non linier mungkin ditemukan apabila medan vektor Hamiltonnya tidak hiperbolik. Sementara itu, beberapa literatur membahas kendali H_∞ non linier dari perspektif konsep disipatif [Hill, et. al., 1976; van der Schaft, 1993; Hewer, et. al., 1989; Isidori, et. al., 1992; Ball, et. al., 1993], karena konsep penguatan berhingga yang mendasari konsep kendali H_∞ merupakan kasus khusus dari disipativitas sistem kendali [Yuliar, 1996; Gupta, 1996; Bambang, 1999].

Dengan berkembangnya metode analisis dan sintesis sistem kendali dengan skema pertidaksamaan matriks linier, makalah ini memaparkan suatu pendekatan alternatif dalam pemecahan masalah kendali H_∞ non linier dan mengkarakterisasi solusinya dengan kondisi konveks yang dinyatakan melalui pertidaksamaan matriks. Cara ini dimotivasi oleh hasil yang diperoleh pada kendali H_∞ bahwa masalah kendali H_∞ linier dapat dikarakterisasi sebagai masalah konveks (*convex characterization*) yang dinyatakan dengan pertidaksamaan matriks linier (PML) [Gahinet, et. al., 1994; Boyd, et. al., 1994; Apkarian, et. al., 1996]. Dengan demikian, konveksitas dari masalah kendali H_∞ non linier akan diuji dan kondisi solusinya dikarakterisasi dengan pertidaksamaan matriks yang disebut pertidaksamaan matriks non linier (PMNL).

Analisis Stabilitas Sistem Non Linier

Teori stabilitas merupakan subjek teori yang cukup tua, seiring dengan perkembangan teori persamaan diferensial dalam kalkulus. Objek teori stabilitas adalah menarik kesimpulan dari perilaku sistem tanpa menentukan solusi trajektorinya secara eksplisit, terlebih lagi pada sistem non linier (persamaan diferensial non linier) yang sering kali cukup sulit untuk didapatkan solusi eksplisitnya. Untuk menguji stabilitas sistem non linier biasanya dilakukan dengan mengkonstruksi sebuah fungsi mirip-energi (*energy-like function*) skalar definit positif kemudian menguji variasi waktu fungsi tersebut dari nilai derivasinya. Fungsi tersebut disebut kandidat fungsi Lyapunov. Apabila turunan dari kandidat fungsi Lyapunov terhadap waktu sepanjang dinamika trajektorinya bernilai semi definit negatif maka fungsi tersebut disebut fungsi Lyapunov. Keberadaan fungsi Lyapunov menjamin stabilitas sistem. Banyak sekali definisi tentang stabilitas yang dipakai untuk mengkarakterisasi stabilitas sistem dinamik. Pada bagian ini akan dipaparkan definisi dan teorema yang penting tentang stabilitas yang digunakan dalam pembahasan selanjutnya. Definisi dan teorema lainnya bisa dilihat misalnya pada Vidyasagar (1994).

Definisi 2.1 Stabil (dalam pengertian Lyapunov)
Misalkan dinamika sistem dinyatakan dengan persamaan diferensial

$$\dot{x}(t) = f(t, x(t)) \quad \forall t \geq 0 \quad (2.1)$$

dengan $x(t) \in R^n$ dan fungsi f merupakan fungsi kontinyu yang memetakan ruang $R^+ \times R^n$ ke ruang R^n. Vektor $x_o \in R^n$ disebut ekuilibrium sistem (2.1) jika

$$f(t, x_o) = 0 \quad \forall t \geq 0 \quad (2.2)$$

Ekuilibrium x_o bersifat stabil jika untuk $\varepsilon > 0$ dan $t_o \in R^+$ terdapat $\delta = \delta(\varepsilon, t_o)$ sedemikian sehingga

jika $\| x_o \| < \delta(\varepsilon, t_o)$ maka

$$\| x(t) \| < \varepsilon, \quad \forall t \geq t_o \quad (2.3)$$

Definisi 2.2 Stabil Asimtotik
Ekuilibrium sistem (2.1) bersifat stabil asimtotik apabila stabil dan

$$\lim_{t \to \infty} \| x(t) \| = 0 \quad (2.4)$$

Dalam masalah penjejakan (*tracking problem*) biasanya stabilitas asimtotik ini menjadi perhatian utama yaitu dengan menjadikan *error* sebagai keadaannya.

Definisi 2.3 Stabil eksponensial
Ekuilibrium sistem (2.1) bersifat stabil eksponensial apabila terdapat bilangan positif a dan b sedemikian sehingga

$$\| x(t) \| \leq a \| x_o \| \exp(-bt), \ \forall t \geq 0 \quad (2.5)$$

Dalam sistem linier, apabila matriks fungsi transfer dari sebuah sistem lingkar tertutup linier bersifat stabil secara eksponensial maka sistem tersebut dikatakan stabil secara internal (*internally stable*) [Maciejowski, 1989]. Pengertian stabilitas internal menjadi fokus penting di dalam merumuskan kendali H_∞.

Selanjutnya, beberapa teorema berikut dipakai untuk menguji stabilitas sistem.

Teorema 2.1 Stabil (dalam pengertian Lyapunov)
Ekuilibrium sistem (2.1) bersifat stabil, jika terdapat fungsi definit positif $V : R^+ \times R^n \to R$ dan dapat diturunkan secara kontinyu sedemikian sehingga

$$\dot{V}(t, x) \leq 0, \quad \forall t \geq t_o \quad (2.6)$$

dengan V dievaluasi sepanjang trajektori persamaan (2.1).

Teorema 2.2 Stabil asimtotik
Ekuilibrium sistem (2.1) bersifat stabil asimtotik, jika terdapat fungsi definit positif $V : R^+ \times R^n \to R$, dapat diturunkan secara kontinyu, dan termasuk fungsi *decresent* sedemikian sehingga $-\dot{V}(t, x)$ merupakan fungsi definit positif.

Teorema 2.3 Stabil eksponensial
Ekuilibrium sistem (2.1) bersifat stabil eksponensial, jika terdapat bilangan positif a, b, c, dan $p \geq 1$ serta adanya fungsi definit positif $V : R^+ \times R^n \to R$ sedemikian sehingga

$$\begin{aligned} a\| x \|^p &\leq V(t, x) \leq b\| x \|^p, \quad \forall t \geq 0 \\ \dot{V}(t, x) &\leq -c\| x \|^p \end{aligned} \quad (2.7)$$

Pada analisis stabilitas dengan menggunakan teorema-teorema di atas, jika ada fungsi V yang memenuhi sifat-sifat yang disebutkan pada teorema maka fungsi V disebut fungsi Lyapunov. Teorema tentang stabilitas merupakan syarat untuk stabilitas sistem. Untuk menerapkan teorema tersebut pada uji stabilitas sistem, tentukan dulu fungsi skalar definit positif $V(t,x)$. Pada tahap ini, $V(t,x)$ disebut kandidat fungsi Lyapunov. Selanjutnya diuji apakah persyaratan untuk $\dot{V}(t, x)$ dipenuhi atau tidak. Jika persyaratan untuk $\dot{V}(t, x)$ dipenuhi maka $V(t,x)$ disebut fungsi Lyapunov dan dengan demikian sistem bersifat stabil. Di lain pihak, jika persyaratan untuk $\dot{V}(t, x)$ tidak dipenuhi maka tidak ada kesimpulan yang dapat diambil tentang stabilitas sistem.

FORMULASI MASALAH KENDALI H_∞ PADA SISTEM NON LINIER

Formulasi umum

Tinjau sistem ruang keadaan non linier umum sebagai berikut

$$\begin{aligned}\dot{x} &= f(x,u,w)\\ y &= g(x,u,w)\\ z &= h(x,u,w)\end{aligned} \qquad (3.1)$$

dengan dua variabel masukan u dan w, dua variabel keluaran y dan z, serta variabel keadaan sistem x. Variabel u menandai vektor masukan kendali, w adalah masukan eksternal (bisa berupa gangguan yang harus dihilangkan atau sinyal referensi yang harus diikuti), y adalah keluaran yang terukur, dan z adalah keluaran yang akan dikendalikan (berupa kesalahan penjejakan (*tracking error*) atau variabel biaya (*cost variable*)). Pada perumusan masalah kendali ini diasumsikan terdapat ekuilibrium x_o, u_o, w_o, yaitu $f(x_o, u_o, w_o) = 0$ dan setelah proses transformasi atau pergeseran koordinat diasumsikan $x_o = 0$, $u_o = 0$, dan $w_o = 0$.

Misalkan γ adalah bilangan positif yang tetap. Masalah kendali H_∞ pada sistem non linier (untuk tingkat peredaman gangguan γ) adalah menemukan sebuah pengendali (*controller*)

$$\begin{aligned}\dot{\xi} &= k(\xi, y)\\ u &= m(\xi, y)\end{aligned} \qquad (3.2)$$

dengan vektor keadaan pengendali ξ dan memenuhi hubungan $k(0,0) = 0$ serta $m(0,0) = 0$, sedemikian sehingga sistem lingkar-tertutup (*closed-loop*) dari (3.1)-(3.2) mempunyai penguatan-L_2 kurang dari atau sama dengan γ, yaitu

$$\int_0^T \| z(t) \|^2 \, dt \le \gamma^2 \int_0^T \| w(t) \|^2 \, dt \qquad (3.3)$$

untuk seluruh fungsi $w(t)$ yang termasuk ke dalam kelas fungsi kudrat yang dapat diintegralkan (*square-integrable function*) dan $T > 0$, serta $z(t)$ adalah respon sistem lingkar tertutup (3.1)-(3.2) untuk masukan $w(t)$ dan kondisi mula $x(0) = 0$ dan $\xi(0) = 0$.

Lebih lanjut untuk sistem non linier, pertidaksamaan integral (3.3) dapat diperketat dengan mensyaratkan untuk seluruh kondisi mula $x(0)$ dan $z(0)$ pada sistem lingkar tertutup (3.1)-(3.2) terdapat bilangan taknegatif K, sedemikian sehingga

$$\int_0^T \| z(t) \|^2 \, dt \le \gamma^2 \int_0^T \| w(t) \|^2 \, dt + K \qquad (3.4)$$

untuk seluruh fungsi $w(t)$ yang termasuk ke dalam kelas fungsi kudrat yang dapat diintegralkan (*square-integrable function*) dan $T > 0$, serta $z(t)$ adalah respon sistem lingkar tertutup (3.1)-(3.2) untuk masukan $w(t)$ dan kondisi mula $x(0) = 0$ dan $\xi(0) = 0$. Formulasi (3.4) memperketat pengertian penguatan-L_2 berhingga dan menjembatani ke arah teori sistem disipatif [van der Schaft, 1994].

Akhirnya, masalah kendali optimal H_∞ pada sistem non linier adalah menemukan bilangan positif terkecil γ_{min} sedemikian sehingga masalah kendali suboptimal dapat dipecahkan untuk seluruh $\gamma > \gamma_{min}$ [van der Schaft, 1994]. Dalam perspektif sistem non linier, masalah kendali ini tidak mudah dipecahkan untuk seluruh kelas sistem non linier. Oleh karena itu, dalam makalah ini akan dibahas masalah kendali H_∞ untuk satu kelas sistem non linier yang bersifat *affine*.

Analisis Penguatan-L_2 dan Kinerja H_∞

Sebagaimana disebutkan pada bagian 3.1, pengertian penguatan-L_2 memegang peranan penting dalam masalah kendali H_∞. Pada bagian ini akan dibahas analisis penguatan-L_2 dalam sistem kendali. Materi berikut ini diambil dari Lu (1995) tetapi karakterisasinya diformulasi ulang dengan pertidaksamaan matriks non linier (PMNL).

Tinjau representasi sistem non linier *affine* berikut

$$G_1 : \begin{cases}\dot{x} = f(x) + g(x)w\\ z = h(x) + k(x)w\end{cases} \qquad (3.5)$$

dengan $x \in R^n$ adalah vektor keadaan, $w \in R^p$ dan $z \in R^q$ adalah vektor masukan dan keluaran. Fungsi f, g, h, dan k adalah fungsi kontinyu yang bernilai vektor atau matriks, serta $f(0) = 0$, $h(0) = 0$. Sistem berevolusi pada subhimpunan terbuka konveks $\mathbf{X} \subset R^n$ yang mengandung titik asal. Dengan demikian, $\mathbf{0} \in R^n$ adalah titik ekuilibrium sistem saat $w = 0$.

Bentuk khusus dari (3.5) adalah

$$G_2 : \begin{cases} \dot{x} = A(x)x + B(x)w \\ z = C(x)x + D(x)w \end{cases} \qquad (3.6)$$

dengan $x \in R^n$ adalah vektor keadaan, $w \in R^p$, dan $z \in R^q$ adalah vektor masukan dan keluaran. A, B, C, D adalah fungsi yang bernilai matriks dengan dimensi yang bersesuaian.

Definisi 3.1 Penguatan-L_2

Sistem (3.5) atau (3.6) dengan keadaan awal $x(0) = 0$ mempunyai penguatan-L_2 (*L_2-gain*) kurang dari atau sama dengan γ untuk $\gamma > 0$ jika

$$\int_0^T \|z(t)\|^2 \, dt \le \gamma^2 \int_0^T \|w(t)\|^2 \, dt \qquad (3.7)$$

untuk semua $T \ge 0$ dan $w(t) \in L_2[0,T]$ sepanjang keadaan $x(t) \in \mathbf{X}$ untuk $t \in [0,T]$.

Berdasarkan Lu, et. al. (1995), sistem mempunyai penguatan-$L_2 \le \gamma$, jika dan hanya jika ada sebuah fungsi $V : \mathbf{X} \to R^+$ dengan $V(0) = 0$ (V disebut fungsi penyimpan (*storage function*)) sedemikian sehingga

$$V(x(T)) - V(x(0)) - \int_0^T \left(\gamma^2 \|w(t)\|^2 - \|z(t)\|^2\right) dt \le 0$$

dengan $w(t) \in L_2[0,T]$ dan $x(t) \in \mathbf{X}$ untuk $t \in [0,T]$.

Proposisi berikut memberikan karakterisasi penguatan-L_2 dalam bentuk pertidaksamaan mariks non linier (PMNL) untuk sistem non linier yang bersifat stabil asimtotik.

Proposisi 3.1 Karakterisasi PMNL untuk stabilitas asimtotik sistem

Tinjau sistem G_1 dengan $R(x) = \gamma[I - \gamma^{-2}k^T(x)k(x)] > 0$. Sistem G_1 bersifat stabil asimtotik dan mempunyai penguatan-$L_2 \le \gamma$, jika terdapat fungsi definit positif V: $\mathbf{X} \to R^+$ sedemikian sehingga

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial V}{\partial x}(x)f(x)+\gamma^{-1}h^T(x)h(x) & \frac{1}{2}\frac{\partial V}{\partial x}(x)g(x)+\gamma^{-1}h^T(x)k(x) \\ \frac{1}{2}g^T(x)\frac{\partial^T V}{\partial x}(x)+\gamma^{-1}k^T(x)h(x) & \gamma^{-1}k^T(x)k(x)-\gamma I \end{bmatrix} < 0$$

(3.8)

Bukti proposisi di atas telah dilakukan oleh Najmurrokhman (2002a).

Dengan argumen komplemen Schur, karakterisasi (3.8) dapat dituliskan dalam bentuk

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial V(x)}{\partial x}f(x) & \frac{1}{2}\frac{\partial V(x)}{\partial x}g(x) & h(x)^T \\ \frac{1}{2}g(x)^T\frac{\partial V(x)^T}{\partial x} & -\gamma I & k(x)^T \\ h(x) & k(x) & -\gamma I \end{bmatrix}$$

(3.9)

Apabila ditinjau sistem non linier khusus G_2, dan ambil bentuk □ EMBED Equation.2 □□□ dengan P(x) = PT(x) : X (Rnxn maka pertidaksamaan matriks (3.9) menjadi (variabel x tidak dituliskan untuk ringkasnya penulisan)

□ EMBED Equation.2 □□□

Kondisi cukup agar PMNL di atas terpenuhi adalah

□ EMBED Equation.2 □□□ (3.10)

untuk semua x (X.

Teorema berikut mengkarakterisasi penguatan-L_2 untuk sistem non linier *affine*.

Teorema 3.1

Tinjau sistem G_2 yang diberikan pada (3.2). Untuk fungsi yang bernilai matriks $P(x) = P^T(x)$: $\mathbf{X} \to R^{n\times n}$, dua pernyataan berikut ekivalen :

(i) $P(x)$ memenuhi (3.10)

(ii) $P(x)$ memenuhi

$$\begin{bmatrix} A^T(x)P(x)+P(x)A(x) & P(x)B(x) & C^T(x) \\ B^T(x)P(x) & -\gamma I & D^T(x) \\ C(x) & D(x) & -\gamma I \end{bmatrix} < 0 \qquad (3.11)$$

untuk semua $x \in \mathbf{X}$.

Jika ada fungsi V: $\mathbf{X} \to R^+$ sedemikian sehingga $\frac{\partial V}{\partial x}(x) = 2x^T P(x)$ maka sistem mempunyai penguatan-$L_2 \le \gamma$ dan bersifat stabil asimtotik.

Bukti untuk teorema di atas telah dilakukan oleh Najmurrokhman (2002a).

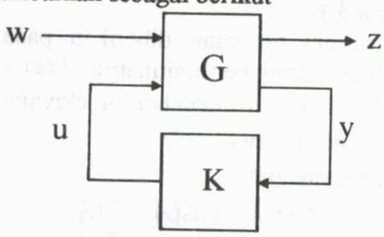
Karakterisasi PMNL untuk sistem yang mempunyai penguatan-$L_2 \le 1$ seperti diperlihatkan oleh Lu, et. al. (1995) merupakan bentuk khusus dari (3.11). Dengan mengamati teorema 3.1 dapat dinyatakan bahwa keberadaan fungsi $P(x)$ yang memenuhi PMNL (3.11) tidak cukup menjamin sistem mempunyai penguatan-$L_2 \le \gamma$. Pada teorema tersebut, persyaratan tambahannya adalah terdapatnya fungsi definit positif V : $\mathbf{X} \to R^+$ sedemikian sehingga $\frac{\partial V}{\partial x}(x) = 2x^T P(x)$. Dengan demikian, penguatan-$L_2 \le \gamma$ untuk sebagian nilai variabel tidak menyebabkan sistem aslinya (untuk semua $x \in$ **X**) mempunyai penguatan-$L_2 \le \gamma$.

Definisi berikut diberikan oleh Lu, et. al. (1995) untuk memberi identitas sistem yang memiliki penguatan-$L_2 \le \gamma$.

Definisi 3.2 Kinerja H_∞
Sistem G_2 mempunyai **kinerja H_∞ kuat** (*strong H_∞-performance*) jika ada fungsi definit positif $P(x) = P^T(x)$ yang memenuhi pertidaksamaan (3.10) atau (3.11) untuk seluruh $x(t) \in \mathbf{X}$ sedemikian sehingga $\frac{\partial V}{\partial x}(x) = 2x^T P(x)$ untuk suatu fungsi definit positif $V : \mathrm{X} \to \mathrm{R}^+$.

Dengan demikian, jika sistem mempunyai **kinerja H_∞ kuat,** sesuai dengan teorema 3.4, maka sistem mempunyai penguatan-$L_2 \le \gamma$.

Karakterisasi PMNL pada sintesis kendali H_∞ non linier
Konfigurasi umpan balik pada sintesis kendali H_∞ digambarkan sebagai berikut



Gambar 3.1 Sistem kendali lingkar tertutup

dengan G adalah kendalian (*plant*) non linier dengan dua masukan, yaitu masukan eksternal (gangguan) w dan masukan kendali (*control input*) u, serta dua keluaran, yaitu keluaran terukur (hasil pengukuran) y dan keluaran yang diatur z. K adalah pengendali (*controller*) yang dirancang. Persamaan ruang keadaan dalam bentuk *affine* diberikan oleh

$$G:\begin{cases} \dot{x} = A(x)x + B_1(x)w + B_2(x)u \\ z = C_1(x)x + D_{11}(x)w + D_{12}(x)u \\ y = C_2(x)x + D_{21}(x)w + D_{22}(x)u \end{cases} \quad (3.12)$$

dengan A, B_i, C_i, dan D_{ij} adalah fungsi kontinyu, x, w, u, z, dan y mempunyai dimensi masing-masing n, p_1, p_2, q_1, dan q_2. Dinamika pengendali K direpresentasikan oleh

$$K:\begin{cases} \dot{\xi} = A_K(\xi)\xi + B_K(\xi)y \\ u = C_K(\xi)\xi + D_K(\xi)y \end{cases} \quad (3.13)$$

dengan A_K, B_K, C_K, dan D_K adalah fungsi kontinyu. Sistem umpan balik (3.12)-(3.13) diasumsikan berlaku pada ruang $\mathbf{X} \times \mathbf{X_o}$ dengan **X** dan $\mathbf{X_o}$ merupakan himpunan konveks terbuka dan mengandung titik asal. Keadaan awal dari kendalian dan pengendali adalah $x(0) = 0$ dan $\xi(0) = 0$.

Masalah kendali H_∞ adalah menemukan pengendali umpan balik K sedemikian sehingga sistem lingkar tertutup mempunyai kinerja H_∞ dan bersifat stabil asimtotik. Pengendali K yang menghasilkan sifat sistem lingkar tertutup seperti itu disebut pengendali H_∞ kuat (*strong H_∞-controller*) [Lu, et. al., 1995].
Seperti dinyatakan oleh Lu, et. al. (1995), sintesis kendali H_∞ non linier mengasumsikan hal-hal berikut :

A1. Rank $\left[B_2^T(x) \quad D_{12}^T(x)\right]^T = p_2$ untuk seluruh $x \in \mathbf{X}$

A2. Rank $\left[C_2(x) \quad D_{21}(x)\right] = q_2$ untuk seluruh $x \in \mathbf{X}$

A3. $D_{11}(x)D_{11}{}^T(x) < \gamma^2 I$ untuk seluruh $x \in \mathbf{X}$

A4. $I - D_K(\xi)D_{22}(x)$ mempunyai invers untuk seluruh $(x, \xi) \in \mathbf{X} \times \mathbf{X_o}$.

Asumsi A1 dan A2 digunakan sebagai alasan teknis, asumsi A3 diperlukan agar masalah kendali H_∞ mempunyai solusi, sedangkan asumsi A4 menjamin keberadaan struktur umpan balik.

Tinjau sistem (3.12)-(3.13), definisikan $B(x) = \left(B_2^T(x) \quad D_{12}^T(x)\right)$ dan $C(x) = \left(C_2(x) \quad D_{21}(x)\right)$ serta misalkan $N_{B(x)}$ adalah distribusi pada **X** yang menghilangkan vektor baris $B(x)$, atau $N_{B(x)}$ adalah matriks yang kolom-kolomnya membentuk basis dari ruang *null* $B(x)$. Teorema 3.2 berikut merupakan hasil utama makalah yang memberikan karakterisasi konveks (dalam bentuk PMNL) bagi syarat perlu agar masalah kendali H_∞ non linier umpan balik keluaran mempunyai solusi.

Teorema 3.2 Karakterisasi konveks
Diberikan sistem (3.12)-(3.13). Masalah kendali H_∞ umpan balik keluaran mempunyai solusi apabila ada fungsi kontinyu bernilai matriks definit positif Y dan Z dengan $Y, Z : \mathbf{X} \to \mathbf{R}^{n\times n}$ sedemikian sehingga PMNL berikut terpenuhi

$$\begin{pmatrix} N_{B(x)} & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix}^T \times$$

$$\begin{pmatrix} A(x)Y(x)+Y(x)A^T(x) & Y(x)C_1^T(x) & B_1(x) \\ C_1(x)Y(x) & -\gamma I & D_{11}(x) \\ B_1^T(x) & D_{11}^T(x) & -\gamma I \end{pmatrix} \quad (3.14)$$

$$\times \begin{pmatrix} N_{B(x)} & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix} < 0$$

$$\begin{pmatrix} N_{C(x)} & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix}^T \times$$

$$\begin{pmatrix} A^T(x)Z(x)+Z(x)A(x) & Z(x)B_1(x) & C_1^T(x) \\ B_1^T(x)Z(x) & -\gamma I & D_{11}^T(x) \\ C_1(x) & D_{11}(x) & -\gamma I \end{pmatrix} \quad (3.15)$$

$$\times \begin{pmatrix} N_{C(x)} & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix} < 0$$

$$\begin{pmatrix} Y(x) & I \\ I & Z(x) \end{pmatrix} \geq 0 \quad (3.16)$$

Bukti teorema di atas telah dilakukan oleh Najmurrokhman (2002c).

Teorema 3.2 merupakan kondisi pemecahan (*solvability condition*) masalah kendali H_∞ non linier dengan umpan balik keluaran untuk sistem non linier *affine*. Teorema tersebut menyatakan bahwa masalah kendali dengan umpan balik keluaran pada sistem non linier *affine* mempunyai solusi apabila terdapat dua fungsi kontinyu bernilai matriks definit positif $Y(x)$ dan $Z(x)$ yang memenuhi PMNL (3.14), (3.15), dan (3.16). Pasangan fungsi yang bernilai matriks $Y(x)$ dan $Z(x)$ yang memenuhi PMNL (3.14), (3.15), dan (3.16) membentuk sebuah himpunan konveks, sehingga teorema 3.2 menyatakan karakterisasi konveks untuk syarat perlu agar masalah kendali H_∞ non linier dengan umpan balik keluaran dapat dipecahkan.

Masalah komputasional dalam kendali H_∞ non linier

Pada bagian ini akan dibahas metode komputasional dalam analisis kinerja H_∞. Sebagaimana dijelaskan pada bagian 3.2, analisis kinerja H_∞ untuk sistem non linier

Untuk lebih konkrit, perhatikan PMNL berikut

$$\begin{bmatrix} A^T(x)P(x)+P(x)A(x) & P(x)B(x) & C^T(x) \\ B^T(x)P(x) & -I & D^T(x) \\ C(x) & D(x) & -I \end{bmatrix} < 0 \quad (3.17)$$

dengan asumsi fungsi-fungsi bernilai matriks $A(x)$, $B(x)$, $C(x)$, dan $D(x)$ bersifat kontinyu pada himpunan **X**. Matriks-matriks tersebut diasumsikan membentuk himpunan konveks

$$\Omega(x) \in \mathrm{Co}\{A_i, B_i, C_i, D_i\}_{i\in\{1,2,\cdots,L\}} \quad \forall x \in X$$

untuk sembarang A_i, B_i, C_i, D_i dengan $I - D_i^T D_i < 0$ untuk $i \in \{1,2,\ldots, L\}$ dan L bilangan bulat positif. Co adalah singkatan dari *convex hull*.

Jika terdapat sebuah matriks definit positif konstan $P \in R^{n\times n}$ sedemikian sehingga

$$\begin{bmatrix} A_i^T P + PA_i & PB_i & C_i^T \\ B_i^T P & -I & D_i^T \\ C_i & D_i & -I \end{bmatrix} < 0 \quad \forall i \in \{1,2,\cdots,L\}$$

yang merupakan himpunan pertidaksamaan matriks linier yang dapat dipecahkan dengan metode optimisasi konveks [Boyd, et. al., 1994] maka solusi P juga memenuhi

$$\begin{bmatrix} A^T(x)P(x)+P(x)A(x) & P(x)B(x) & C^T(x) \\ B^T(x)P(x) & -I & D^T(x) \\ C(x) & D(x) & -I \end{bmatrix} < 0$$

untuk seluruh $x \in$ **X**.

Dengan demikian, fungsi Lyapunov yang bersesuaian dengan stabilitas sistem G_2 (3.6) berbentuk $V(x) = x^T Px$.

Metode pencarian solusi PMNL di atas memberikan pendekatan yang baik untuk mendapat solusi lokal. Tetapi, pendekatan ini memberikan hasil yang bersifat konservatif jika himpunan keadaan **X** cukup besar.

CATATAN PENUTUP (*Concluding Remarks*)

Telah diuraikan analisis sistem kendali kokoh untuk sistem non linier dengan pendekatan pertidaksamaan matriks nonlinier. Keberadaan solusi dari kondisi pemecahan yang diuraikan dalam makalah menjamin adanya pengendali yang memberikan sifat kekokohan sistem yang dikendalikan. Masalah komputasional untuk memecahkan pertidaksamaan matriks juga diberikan. Karena sifat non linieritas yang mengarah ketakberhinggaan perhitungan maka solusi pertidaksamaan matriksnya bersifat tidak langsung (*ad hoc solution*).

Tindak lanjut dari penelitian berikutnya diarahkan untuk membuat simulasi numerik dari hasil-hasil yang telah diuraikan dalam makalah serta pembentukan kendali (*controller*) yang mengokohkan sistem untuk hampir seluruh parameter atau keadaan (*state variable*) sistem. Aplikasi dari penelitian ini untuk sistem non linier nyata sangat menarik, khususnya sistem non linier yang bisa didekati dengan sifat *affine*, seperti sistem elektromekanik (robotika) dan sistem kendali terbang (*flight control*).

Ucapan terima kasih (*Acknowledgements*)
Makalah ini merupakan hasil awal *on going research* penulis yang didukung oleh LPPM UNJANI untuk Tahun Akademik 2002/2003.

DAFTAR PUSTAKA

[1] Apkarian, P. et. al, "LMI Techniques in Control Engineering from Theory to Practice : Workshop Note CDC 1996", Kobe, Japan, 1996.

[2] Ball, J.A., Helton, J.W., and Walker, M.L., 1993, "H_∞ Control for Nonlinear Systems with Output Feedback", IEEE Trans. Automatic Control, AC-4 vol. 38, 546-559.

[3] Bambang, R.T., Najmurrokhman, A., and Yuliar, S., 2000, "Dissipative Control for A Class of Nonlinear Systems Using State-Dependent LMI", Proc. of 19th IASTED Conf. Modelling, Identification and Control, Austria.

[4] Bambang, R.T., 1999, "Dissipative Control of Linear Parametrically Varying Systems Using Output Feedback : An LMI Approach", Proc. of 18th IASTED Conf. Modelling, Identification and Control, Austria.

[5] Boyd, S. et. al., 1994, "Linear Matrix Inequality in System and Control Theory", SIAM Series vol. 15, Philadelphia, USA.

[6] Dailey, R., 1995, "Robust Control", makalah dalam *Workshop Tutorial* : *Modern Control Systems* (editor : Karl John Astrom, et. al.)

[7] Desoer, C.A. and Vidyasagar, M., 1975, "Feedback Systems : Input-Output Properties", Academic, New York, USA.

[8] Doyle, J.C. et. al., 1989, "State-Space Solutions to Standard H_2 and H_∞ Control Problems", IEEE Trans. AC vol. AC-34, 831 – 847.

[9] El Ghaoui, L., et. al., 2000, "Advances in Linear Matrix Inequality Methods in Control", SIAM Series, Philadelphia, USA.

[10] Gahinet, P. et. al., 1995, "LMI Control Toolbox", Mathworks Inc., Natick, MA, USA.

[11] Gahinet, P. and Apkarian, P., 1994, "A Linear Matrix Inequality Approach to H_∞ Control", Int. Journal of Robust and Non Linear Control vol. 4, 421-448.

[12] Green, M. and Limebeer, D.J.N., 1995, "Linear Robust Control", Prentice-Hall Englewood Cliffs, New Jersey, USA.

[13] Gupta, S. , 1996, "Robust Stabilization of Uncertain Systems Based on Energy Dissipation Concepts" , NASA Contractor Paper 4713.

[14] Hill, D.J. and Moylan, P.J., 1976, "Stability of Nonlinear Dissipative Systems", IEEE Trans. Automatic Control, AC-5, 708-711.

[15] Isidori, A. and Astolfi, A., 1992, "Disturbance Attenuation and H_∞ Control via Measurement Feedback in Nonlinear Systems", IEEE Trans. Automatic Control, AC-9 vol. 37, 1283-1293.

[16] Kang, W., 1995, "Nonlinear H_∞ Control and its Application to Rigid Aircraft", IEEE Trans. Automatic Control, AC-7 vol. 40, 1281-1285.

[17] Lu, W.M. and J.C. Doyle, 1995, "H_∞ Control of Non Linear Systems : A Convex Characterization", IEEE Trans. AC vol. AC-40, 1668 – 1675.

[18] Maciejowski, J.M., 1989, "Multivariable Feedback Design", Addison-Wesley, Workingham, England.

[19] Najmurrokhman, A, 2000, "Sintesis Kendali Disipatif Untuk Sistem Non Linier Dengan Pendekatan Pertidaksamaan Matriks Non Linier", Tesis Magister.

[20] Najmurrokhman, A., 2001, "Sintesis Kendali H∞ Untuk Sistem Linier", Majalah Kopertis "Wawasan Tridharma" No. 5 Tahun XIV, Pebruari 2001.

[21] Najmurrokhman, A., 2002a, "Karakterisasi Konveks Melalui Pertidaksamaan Matriks Non Linier Pada Analisis Stabilitas Kendali H∞ Untuk Sistem Non Linier", Jurnal Fakultas Teknik Unjani No. 1 Tahun I Mei 2002.

[22] Najmurrokhman, A, 2002b, "Analisis dan Sintesis Kendali H∞ Untuk Sistem Non Linier Dengan Pendekatan Pertidaksamaan Matriks Non Linier", Proceeding of Seminar

on Intelligent Technology and Its Application (SITIA2002), May 2002.

[23] Najmurrokhman, A., 2002c, "Laporan Kemajuan (*Progress Report*) Penelitian", LPPM UNJANI.

[24] van der Schaft, A.J., 1992, "L_2-Gain Analysis of Non linear Systems and Non Linear State Feedback H_∞ -Control", IEEE Trans. AC vol. AC-37, 770 – 784.

[25] van der Schaft, A.J. 1993, "Nonlinear State Space H_∞ -Control Theory", makalah dalam buku *Essay on Control : Perspectives in The Theory and its Applications* (eds. H.L. Trentelman and J.C. Willems), Birkhauser.

[26] Yuliar, S. , 1996, "Dissipative Systems Theory : Analysis and Synthesis", Disertasi Doktor, Australian National University, Canberra, Australia.

Biodata penulis

Penulis adalah staf pengajar di Jurusan Teknik Elektro UNJANI. Memperoleh gelar sarjana teknik dan magister teknik dari Institut Teknologi Bandung masing-masing tahun 1996 dan 2000 dalam bidang kendali dan sistem. Minat penelitiannya menyangkut tentang analisis dan sintesis kendali sistem non linier dengan pendekatan pertidaksamaan matriks non linier. Selama setahun (2002-2003), penulis bergabung sebagai anggota peneliti di Nakajima Laboratory, Institute of Medical Sciences, Tokai University JAPAN untuk terlibat dalam penelitian tentang *telemedicine*.